Bab II

KAJIAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan bagian penting dari pada pemodelan penyakit, hal ini dikarenakan pemodelan pada umumnya bergantung terhadap waktu. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial liniear dan persamaan diferensial tak liniear. Secara matematis persamaan diferensial liniear dan tak liniear dituliskan pada definisi 1 dan definisi 2 berikut.

Definisi 1; Sistem Persamaan Diferensial Liniear (SPDL)

Suatu sistem persamaan differensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + b,\ x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

Dengan A adalah matriks koefisien konstan berukuran $n\ x\ n$ dan b adalah vektor konstan. Sistem tersebut dinamakan SPDL orde 1 dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Jika $b = 0$ sistem dikatakan homogen dan dikatakan tidak homogen jika $b \neq 0$ (Tu, 1994: 83-84).

Definisi 2; Sistem Persamaan Diferensial Tak Linier (SDPTL)

Suatu sistem persamaan differensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2.2}$$

Dengan

$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ dan $f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n) \end{pmatrix}$ diasumsikan fungsi tak liniear pada $x_1, x_2,\ \dots\ ,x_n$.

Sistem (*2.2*) disebut sistem persamaaan diferensial tak linier (Brawn, 1983: 370).

2.2 Titik Tetap

Perilaku sistem di setiap titik dapat ditentukan dari penyelesaian eksaknya. Tapi tidak semua sistem dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Oleh karena itu, diperlukan informasi lain untuk mengamati perilaku sistem. Perilaku sistem dapat diamati pada titik-titik dimana sistem berada pada keadaan setimbang. Titik tersebut dinamakan titik kesetimbangan atau titik tetap. Titik tetap dari sebuah sistem didefinisikan sebagai titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Secara matematis titik tetap dapat dituliskan pada definisi 3 berikut.

Definisi 3; [Titik Tetap]

Diberikan suatu persamaan diferensial

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in \Re^n \tag{2.3}$$

/

Titik $\overline{x}$ disebut titik tetap atau titik kritis atau disebut juga titik kesetimbangan jika $f(\overline{x}) = 0$ (Tu, 1994: 134)

Definisi 4; [Titik Tetap Stabil]

$\overline{x}(t)$ dikatakan stabil atau stabil *Liapunov* jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sehingga, untuk solusi $y(t)$ yang lain memenuhi $\left|\overline{x}(t_0) - y(t_0)\right| < \delta$ maka $\left|\overline{x}(t) - y(t)\right| < \varepsilon$ untuk $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ (Wiggins, 1996: 6).

Definisi 5; [Titik Tetap Stabil Asimtotik]

$\overline{x}(t)$ dikatakan stabil asimtotik jika $\overline{x}(t)$ merupakan stabil *Liapunov* dan jika terdapat sebuah konstanta $b > 0$ sehingga, jika $\left|\overline{x}(t_0) - y(t_0)\right| < b$ maka $\lim_{t\to\infty}\left|\overline{x}(t) - y(t)\right| = 0$ untuk $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ (Wiggins, 1996: 7).

2.3 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Selanjutnya, untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik tetap digunakan konsep kestabilan. Misalkan diberikan sebuah matriks A yang berukuran 2 x 2 sebagai berikut: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan persamaan karakteristik $\det\left|A - \lambda I\right| = 0$ dan I adalah matriks identitas, maka persamaan karakteristiknya menjadi

$$\det\left\|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| = 0 \Leftrightarrow \det\left\|\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\right\| = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc)$$

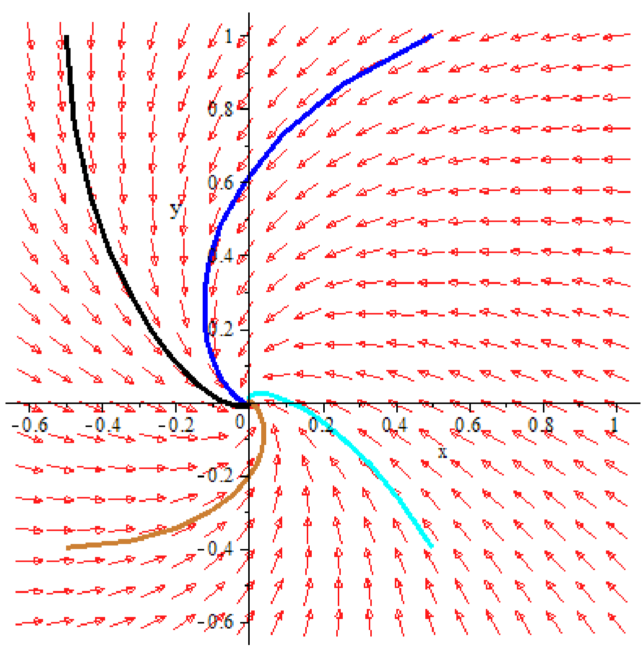
Persamaan diatas dapat dituliskan dengan $\lambda^2 + \tau\lambda + \ell = 0$ dengan $\tau = -trace(A) = -(a+d)$ dan $\ell = \det(A) = ad - bc$ dengan demikian diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\ell}}{2}$ (Tu, 1994: 33).

Secara umum kestabilan suatu titik tetap didasarkan pada kriteria berikut (Tu, 1994):

- Stabil jika:
  a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda j < 0$) untuk setiap *j*)

Contoh kasus:

$\dfrac{d}{dt}x = -3x - \sqrt{2}y$ dan $\dfrac{d}{dt}y = \sqrt{2}x - 2y$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{17}$ dan $\lambda_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{17}$.

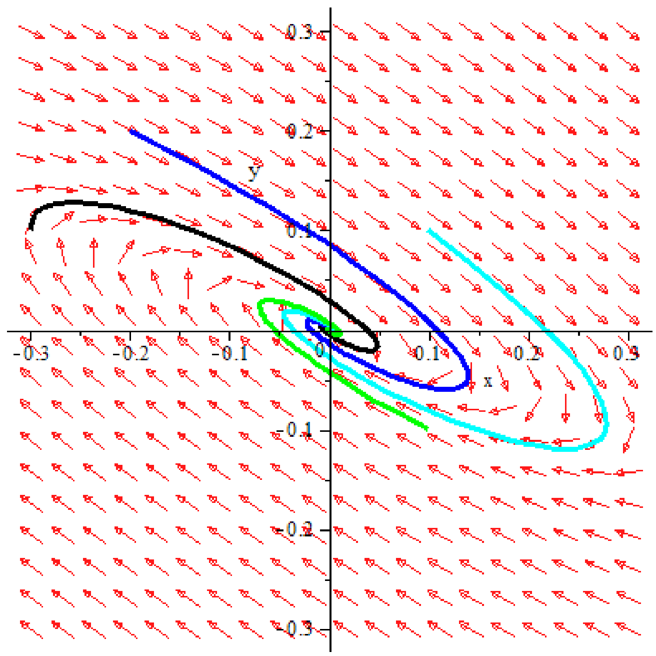


Gambar 2.1 Trayektori untuk titik tetap yang stabil

b. Setiap komponen nilai eigen kompleks lebih kecil atau sama dengan nol, (Re(λ_j > 0) untuk setiap *j*).

Contoh kasus:

$\frac{d}{dt}x = x + 3y$ dan $\frac{d}{dt}y = -x - 2y$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ dan $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.



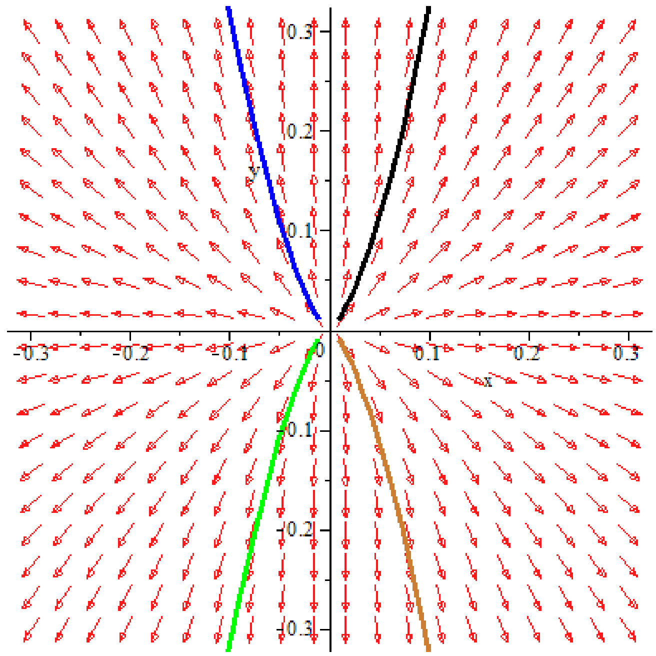
Gambar 2.2 Trayektori untuk titik tetap yang stabil (spiral)

- Tak Stabil jika:

a. Setiap nilai eigen real adalah positif ($\lambda j > 0$) untuk setiap *j*)

Contoh kasus:

$\frac{d}{dt}x = 2x$ dan $\frac{d}{dt}y = 3y$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$.

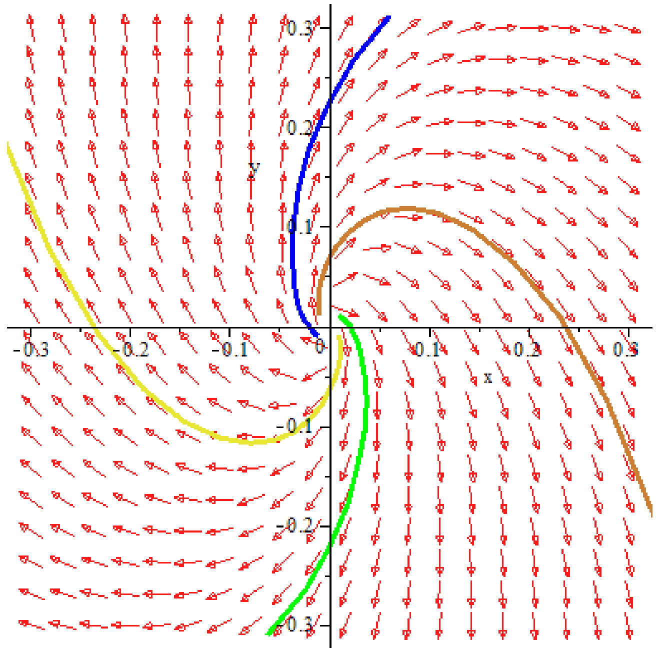


Gambar 2.3 Trayektori untuk titik tetap yang tidak stabil

b. Setiap komponen nilai eigen kompleks lebih besar dari nol, (Re ($\lambda_j > 0$) untuk setiap *j*).

Contoh kasus:

$\frac{d}{dt}x = 2x + y$ dan $\frac{d}{dt}y = -3x + 2y$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{3}$ dan $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{3}$.



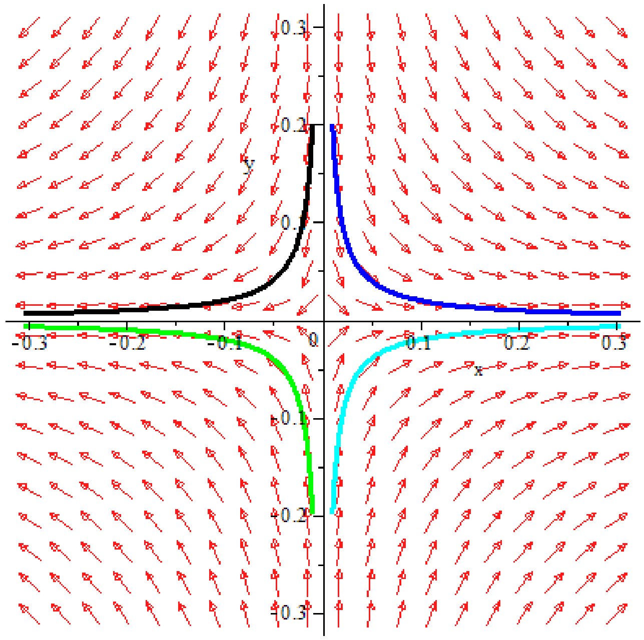
Gambar 2.4 Trayektori untuk titik tetap yang tidak stabil (spiral)

- Sadel jika

Perkalian dua buah nilai eigen real sembarang adalah negatif ($\lambda_j.\lambda_k < 0$ untuk *j* dan *k* sembarang).

Contoh kasus:

$\frac{d}{dt}x = 2x$ dan $\frac{d}{dt}y = -2y$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 == -2$.



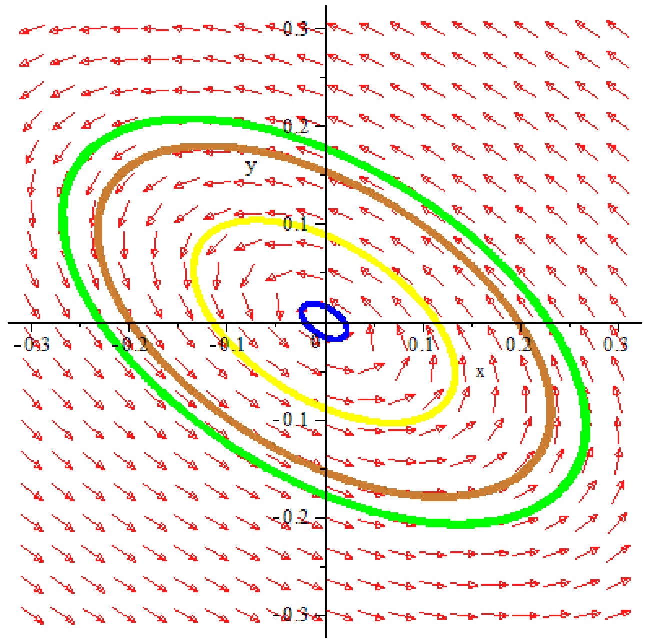
Gambar 2.5 Trayektori untuk titik tetap yang Saddle (tidak stabil)

- *Centre* jika:

  Nilai eigen real pada bagian kompleks sama dengan nol (Re (λ_j = 0).

Contoh kasus:

$\frac{d}{dt}x = -2x - 5y$ dan $\frac{d}{dt}y = 3x + 2y$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = i\sqrt{11}$ dan $\lambda_2 = -i\sqrt{11}$.



Gambar 2.6 Trayektori untuk titik tetap yang *centre*

2.4 *Centre Manifold*

Centre Manifold digunakan untuk melihat kestabilan jika salah satu nilai eigen memiliki nilai nol. Adapun teori *centre manifold* dapat dituliskan sebagai berikut (Wiggins, 1996: :

Suatu persamaan diferensial :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= Bx + g(x, y) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Dimana

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \qquad & Df(0,0) &= 0 \\ g(0,0) &= 0, \qquad & Dg(0,0) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Persamaan diatas dapat dianalisis dengan A adalah sebuah matriks c x c mempunyai nilai eigen dengan bagian real dengan nol dan B adalah sebuah matriks s x s dan f dan g adalah fungsi C^r.

Teorema 2.4.1 Terdapat sebuah C^r centre manifold untuk (2.4). Dinamik dari (2.4) dibatasi ke *centre manifold* untuk u yang cukup kecil, diberikan persamaan

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)) \tag{2.6}$$

Bukti: Lih. (Carr, 1981: 14)

Teorema 2.4.2 (i) misalkan solusi nol dari dari (2.6) adalah stabil maka solusi nol pada (2.4) juga dikatakan stabil. (ii) misalkan solusi nol dari dari (2.6) adalah stabil, kemudian jika *x(t), y(t)* adalah solusi dari (2.4) dengan (*x(0),y(0))* yang cukup kecil, maka solusi *u(t)* dari (2.6) sehingga $t \to \infty$.

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dimana $\gamma > 0$ adalah konstanta (Wiggins, 1996: 194).

Bukti: Lih. (Carr, 1981: 14)

2.5 Pelinieran

Pelinieran dilakukan untuk memudahkan perhitungan dalam tahapan menganalisis kestabilan titik tetap jika sistem persamaan yang terbentuk adalah sistem persamaan diferensial tak liniear. Adapun pelinieran dapat di uraikan sebagai berikut:

Misalkan:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Andaikan (x', y') adalah titik tetap dari persamaan diatas, maka $f(x', y') = 0$ dan $g(x', y') = 0$. Misalkan $u = x - x'$ dan $v = y - y'$ maka didapatkan

$$\dot{u} = \dot{x}$$

$$= f(x' + u, y' + v)$$

Dengan menggunakan ekspansi taylor maka didapatkan:

$$= f(x', y') + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + o(u^2, v^2, uv)$$

$$= u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + o(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{v} = \dot{y}$$

$$= g(x' + u, y' + v)$$

$$= g(x', y') + u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y} + o(u^2, v^2, uv)$$

$$= u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y} + o(u^2, v^2, uv)$$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O(u^2 + v^2 + uv)$$

Matriks $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$ disebut matriks Jacobi pada titik tetap (x', y'). Karena $O(u^2 + v^2 + uv) \longrightarrow 0$ maka dapat diabaikan, sehingga didapat persamaan linear:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

(Strogatz, 1994: 150)

2.6 Model Epidemi

2.6.1 Definisi Model Epidemi

Model Epidemi adalah cara sederhana untuk menggambarkan penularan penyakit menular melalui individu.

Model Epidemi dibagi menjadi dua jenis yaitu:

1. Stokastik

Model Stokastik adalah model matematika dimana gejala-gejala dapat diukur dengan derajat kepastian yang tidak stabil. Pada Model Stokastik disebut juga model probabilistik peluang dari masing-masing kejadian benar-benar di hitung, menyusun sebuah model stokastik cenderung lebih sulit dari model deterministik. Kaidah-kaidah peluang adalah alat matematika yang cukup vital dalam menyusun model stokastik. Contoh model stokastik adalah teori antrian dan teori permainan, dimana ini merupakan pengembangan dari riset operasi modern. Dalam mengkaji suatu sistem, model ini sering dipakai karena perihal yang dikaji umumnya mengandung keputusan yang tidak tentu.

2. Deterministik

Ketika berhadapan dengan populasi yang besar, seperti dalam kasus tuberkulosis, model matematika deterministik atau compartmental digunakan. Dalam model deterministik, individu dalam populasi ditugaskan pada subkelompok yang berbeda atau kompartemen, masing-masing mewakili tahap tertentu epidemi. Huruf seperti M, S, E, I, dan R adalah sering digunakan untuk mewakili tahapan yang berbeda. Tingkat transisi dari satu kelas ke kelas lainnya secara matematis dinyatakan sebagai derivatif, maka model ini diformulasikan dengan menggunakan persamaan diferensial.

2.6.2 Model Deterministik Kompartemen

Model Deterministik Kompartemen terdiri atas:

A. Model SIR

Pada tahun 1927, *W.O. Kermack* dan *A.G. McKendrick* menciptakan model di mana suatu populasi diasumsikan sebagai populasi yang tetap dengan hanya tiga kompartemen, rentan; *S,* terinfeksi; *I,* dan sembuh; *R* Kompartemen digunakan untuk model ini terdiri dari tiga kelas

- *S* adalah kelompok rentan penyakit pada waktu t
- *I* adalah kelompok yang terinfeksi dan menularkan penyakit pada waktu t
- *R* adalah kelompok yang telah sembuh pada waktu t

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$S \rightarrow I \rightarrow R$$

B. Model SIS

Model SIS dapat dengan mudah diturunkan dari model SIR dengan hanya mempertimbangkan bahwa individu-individu sembuh tanpa kekebalan terhadap penyakit. Dengan kata lain, seseorang akan menjadi rentan kembali setelah dia sembuh dari penyakit.

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$S \rightarrow I \rightarrow S$$

C. Model SIRS

Model ini hanya sebuah perpanjangan dari model SIR, aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$$

Satu-satunya perbedaan adalah anggota kelas sembuh untuk bebas dari infeksi dan bergabung kembali dengan kelas rentan

D. Model SEIS

Model Seis mempertimbangkan periode terpapar atau laten penyakit, memberikan sebuah kompartemen tambahan, E.

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$S \rightarrow \varepsilon \rightarrow I \rightarrow S$$

Dalam model ini infeksi tidak meninggalkan kekebalan yang tahan lama sehingga individu yang telah sembuh kembali menjadi rentan lagi, bergerak kembali ke dalam kompartemen *S*.

E. Model SEIR

Model SIR dibahas di atas hanya memperhitungkan penyakit-penyakit yang menyebabkan seorang individu untuk dapat menulari orang lain segera setelah infeksi mereka. Banyak penyakit memiliki apa yang disebut fase laten atau terbuka, di mana individu dikatakan terinfeksi tetapi tidak menular.

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$S \rightarrow \varepsilon \rightarrow I \rightarrow R$$

Dalam model ini populasi asal (N) adalah dibagi menjadi empat kompartemen: rentan, terkena, menular, dan sembuh, dengan jumlah individu dalam kompartemen, atau kepadatan mereka masing-masing dilambangkan oleh S, E , I, R.

F. Model MSIR

Ada beberapa penyakit di mana individu dilahirkan dengan imunitas pasif dari ibunya.

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$M \rightarrow S \rightarrow I \rightarrow R$$

Untuk menunjukkan hal ini secara matematis, sebuah kompartemen tambahan yang ditambahkan, M.

G. Model MSEIR

Untuk kasus penyakit, dengan faktor kekebalan pasif, dan periode laten yang ada adalah model MSEIR.

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$M \to S \to \varepsilon \to I \to R$$

H. Model MSEIRS

Sebuah model MSEIRS mirip dengan MSEIR, tetapi kekebalan di kelas R akan bersifat sementara, sehingga individu akan kembali kerentanan mereka ketika kekebalan sementara berakhir.

Aliran model ini dapat dianggap sebagai berikut:

$$M \to S \to \varepsilon \to I \to R \to S$$

(http//en.wikipedia.org)

2.7 Model *Kermack-McKendrik* pada Cacar Air

2.7.1 Cacar Air

Cacar Air (*Varisela*, *Chickenpox*) adalah suatu infeksi virus menular yang menyebabkan ruam kulit berupa sekumpulan bintik-bintik kecil yang datar maupun menonjol, lepuhan berisi cairan serta keropeng, yang menimbulkan rasa gatal. Penyebabnya adalah virus *varicella-zoster*. Virus ini ditularkan melalui percikan ludah penderita atau melalui benda-benda yang terkontaminasi oleh cairan dari lepuhan kulit. Penderita bisa menularkan penyakitnya mulai dari timbulnya gejala sampai lepuhan yang terakhir telah mengering.

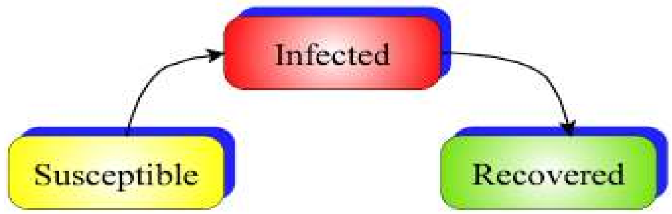
Karena itu, untuk mencegah penularan, sebaiknya penderita di*isolasi* (diasingkan). Jika seseorang pernah menderita cacar air, maka dia akan memiliki kekebalan dan tidak akan menderita cacar air lagi. Tetapi virusnya bisa tetap tertidur di dalam tubuh manusia, lalu kadang menjadi aktif kembali dan menyebabkan *herpes zoster* (http://medicastore.com).

2.7.2 Asumsi

Model SIR dikembangkan oleh *Kermack* dan *McKendrik*. Model SIR digunakan dalam epidemiologi untuk menghitung jumlah rentan, terinfeksi, orang sembuh dalam suatu populasi. Model ini dapat digunakan dengan asumsi sebagai berikut:

1. Populasi adalah tetap (tingkat infeksi dan pemulihan jauh lebih cepat daripada skala waktu kelahiran dan kematian)
2. Satu-satunya cara seseorang dapat meninggalkan kelompok rentan adalah untuk menjadi terinfeksi.
3. Satu-satunya cara seseorang dapat meninggalkan grup yang terinfeksi adalah untuk sembuh dari penyakit.
4. Setelah seseorang telah sembuh, orang menerima imunitas.
5. Tidak ada kekebalan yang diwariskan.
6. Anggota campuran populasi homogen (memiliki interaksi yang sama dengan satu sama lain untuk tingkat yang sama).

Aliran model ini dianggap sebagai berikut:



2.7.3 Model SIR

Menurut Teri Johnson (2009: 2) Model ini dimulai dengan beberapa notasi dasar yaitu/

S : Digunakan untuk mewakili jumlah invidu yang belum terinfeksi pada waktu t atau yang rentan terhadap penyakit

I : Menunjukkan jumlah individu yang telah terinfeksi dengan penyakit pada waktu t dan mampu menyebarkan penyakit

R : Jumlah individu yang telah terinfeksi dan sembuh dari penyakit

N : Total Populasi

Asumsi tersebut dapat dimodelkan dalam satu set persamaan diferensial

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \qquad (2.9)$$

$$\frac{dI}{dt} = (\beta S - \gamma)I \qquad (2.10)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \qquad (2.11)$$

dimana

$\gamma =$ adalah tingkat pemulihan (dengan yang lebih besar atau sama dengan *nol*)

α = adalah probabilitas terinfeksi

k = adalah jumlah orang orang yang terinfeksi datang dalam kontak dengan setiap periode waktu rata-rata

$\beta = k\alpha$ adalah jumlah rata-rata transmisi dari seseorang terinfeksi dalam periode waktu (dengan lebih besar atau sama dengan *nol*)

Dan

$$S + I + R = N \qquad (2.12)$$

2.7.4 Rasio Reproduksi Dasar

Suatu bagian penting dari pemodelan penyakit adalah rasio reproduksi dasar, dinotasikan R_0. Rasio reproduksi dasar dikatakan penting karena ia memberitahu jika populasi memiliki risiko dari penyakit (Johnson, 2009: 3).

Bilangan reproduksi dasar adalah potensi penularan penyakit pada populasi rentan, merupakan rata-rata jumlah individu yang terinfeksi secara langsung oleh seorang penderita selama masa penularannya bila termasuk dalam populasi yang seluruhnya masih rentan.

Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan ini

a. Ketika $R_0 > 1$, terjadinya penyakit akan meningkat.
b. Ketika $R_0 < 1$, terjadinya penyakit akan menurun dan penyakit akhirnya akan hilang.
c. Ketika $R_0 = 1$, terjadinya penyakit akan konstan (Hackborn, 2008).