BAB 5

PENUTUP

Medan gravitasi muncul sebagai fenomena geometri belaka, yaitu sebagai manifestasi kelengkungan manifold Pseudo-Riemann. Yang menarik pula, persamaan medannya (yang dikenal sebagai persamaan medan Einstein) muncul sebagai konsekuensi relasi geometris belaka. Simetri metrik tensor $g_{\mu\upsilon}$ memainkan peranan ganda: pada satu sisi ia menentukan geometri empat dimensi dari ruangwaktu, dan disisi lain ia mengganti skalar tunggal potensial gravitasi Newtonian menggunakan medan tensor yang dalam relativitas umum Einstein memainkan peranan dalam medan gravitasi. Memberikan tensor energi-momentum $T^{\mu\upsilon}$untuk materi, $g_{\mu\upsilon}$ ditentukan sebagai solusi untuk persamaan medan gravitasi Einstein

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\upsilon} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

Didalam kehadiran untuk materi yang memutar, T^{eff} tidak perlu memenuhi kondisi energi positif dan juga T . Sehingga teori singularitas klasik oleh Penrose dan Hawking dapat ditanggulangi. Dalam teori Einstein-Cartan, ada solusi kosmologi sederhana tanpa singularitas (Trautman, 2006).

Solusi dari simetrik bundar dari metrik persamaan medan Einstein-Cartan-Dirac meyatakan bahwa fenomena kuantum juga merupakan manifestasi geometris. Yang mana jika mengabaikan spinor Dirac, metrik tersebut akan tereduksi menjadi metrik AdS_3.

Penelitian ini menarik untuk dikembangkan, karena dengan memahami alam ini menggunakan hukum-hukum fisika dan teorema Ilmuan yang beberapa diantaranya dapat dibuktikan dengan pendekatan empiris dapat memberikan kepuasan dalam berpikir tentang eksistensi alam semesta itu sendiri. Berbicara alamsemesta berarti membicarakan hal yang luas jangkauannya. Pada kesempatan ini, peneliti hanya meninjau geometri alam semesta. Pengkajian alam semesta telah dilakukan sejak zaman sebelum masehi hingga sekarang, yang tentunya mengalami perubahan dan perkembangan seiring dengan ilmu pengetahuan. Peneliti berharap dimassa yang mendatang akan muncul peneliti-peneliti lainnya yang mau mengembangkan kajian geometri alam semesta yang lebih mendekati kebenaran sesuai dengan teorema dan hukum-hukum alam yang ada.

DAFTAR PUSTAKA

1. Carmeli, Moshe dan Malin, Shimon. 2000. *An Introduction Theorys of Spinor*. London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

2. Carmeli, Moshe. 1977. *Group Theory and General Relativity (Representations of The Lorentz Group and Their Applications To The Gravitational Field)*. Great Britain: McGraw-Hill Inc.

3. Celletti, Alessandra. 2002. *Lecture Notes in Physics*. Germany: Springer.

4. Chandrasekhar, S. 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*. New York: Oxford university press.

5. Dzhunushaliev, V. dan Singleton, D.1999. *Einstein-Cartan-Heisenberg Theory of Gravity with Dynamical Torsion.* http://enu.kz/repository/repository2012/Einstein_Cartan_Heisenberg (diakses tanggal 29 januari 2014).

6. Dereli, T dan Sert O. N. Ozdemir. 2010. *Einstein-cartan Theory In (1+2)-Dimensions*. arXiv:1002.0958v1 [gr-qc].

7. Dirac, P.A.M.2005. *Teori Relativitas Umum.* http://www.fisikanet.lipi.go.id/ data/1014224403/data/1105703988.pdf (diakses tanggal 29 januari 2014).

8. Earman, John. 1995. *Bangs, Crunches, Whimpers, and shierks (Singularities And Acausalities In Relativistic spacetimes)*. New York: Oxford University Press.

9. Ebenezer Ndikilar Chifu, 2012. *Gravitational Fields Exterior to Homogeneous Spheroidal Masses*. The Abraham Zelmanov Journal. Vol.5,2012. ISSN 1654-9163.

10. Hehl Friedrich W .2007. *Note On The Torsion Tensor*. Letter to Physics Today.http://ptonline.aip.org/journals/doc/PHTOADft/vol_60/iss_3/16_2. shtml. (diakses tanggal 8 Perbuari 2014).

11. Hestenes, David. 1981. *Geometry of the Dirac Theory.* A Symposium on the Mathematics of Physical Space-Time, Facultad de Quimica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico City, 67–96, (1981). http://geocalc.clas.asu. edu/pdf/Geom_Dirac.pdf.

12. Hu, Bo-You et all. 1997. Differential Geometry for Physicists. Advanced series on theoretical physics vol.6. World Scientific.

13. Lovelock, David and Hanno, Rund. 1989. Tensors, Differential Forms, and Variational Principles. New York: John Wiley and Sons.

14. Naber L. Gregory. 1988. *Spacetime And Singularities An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

15. Nikodem J. Poplawski. 2010. *Cossmology with Torsion: An Alternative to Cosmic Inflation.* Phys. Lett. B 694 (3): 181-185. arXiv:1007.0587.

16. O'Connell, R. P. 1977. *Attractive Spin-spin Contact Interactions in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Torsion Theory of Gravitation.* Louisiana: Physical Review D Volume 16, Number 4.

17. Peacock, John A.1999. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press.

18. Ramadhan, HandhikaS. 2005. *Pendekatan Geometri Differensial DalamTeori Relativitas Umum dan Solusi 2 Soliton Persamaan Medan Einstein Axisimetrik.*http://www.Fisikanet.lipi.go.Id/data/1014224400/data/1118793951.pdf (diakses tanggal 29 januari 2014).

19. Russell, Bertrand. 2009. *Teori Relativitas Einstein Penjelasan Popular Untuk Umum.* Yogyakarta: Pustaka Belajar.

20. Steiner, Frank. *Solution of the Friedmann Equation Determining the Time Evolution, Acceleration and the Age of the Universe.* http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.260/paper/08/tp08-7.pdf.

21. Setiawan, Sandi. 1994. *Gempita Tarian kosmos.* Yogyakarta: Andi Offset.

22. Trautman, Andrzej. 2006. *Einstein-Cartan Theory*. Encyclopedia of Mathematical Physics, edited by J.P Francoise, G.L Naber and Tsou S.T. Oxford: Elsevier,vol.2, pages 189-195.

23. Yusuf, Muhammad. 2003. *Model Kosmologi Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) dan Einstein- de Sitte*r. Surabya:Proceedings Seminar Seminar III-2003 PascaSarjana ITS, ISBN 979-545-027-1.

24. Celletti, Alessandra. 2002 *Lecture Notes in Physics.* Germany: Springer

25. Sthephen W. Hawking. 2005. *The Theory of Everything: The Origin and Fate of The Universe.* United States of America: Phoenix Books.

26. .

LAMPIRAN

1. Ruang Waktu Empat Dimensi

1.1 Skalar, Vektor dan tensor

Misalkan koordinat x^{μ} ditrasformasikan dan berubah menjadi x'^{ν}

$$x'^{\nu} = x'^{\nu}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv x'^{\nu}(x) \quad (1.1)$$

Skalar dapat dinyatakan oleh fungsi $\phi(x)$ yang bergantung posisi x^{μ}. Kuantitas ini setelah mengalami trasformasi koordinat menjadi

$$\phi'(x) = \phi(x) \quad (1.2)$$

Ini adalah hukum trasformasi koordinat bagi skalar.

Transformasi bagi koordinat $dx^{\mu} \rightarrow dx'^{\mu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\upsilon}} \partial x^{\upsilon}$

$(\upsilon = 1,2,3)$

Vektor kontravarian A^{μ} bertransformasi menurut definisi sebagai berikut

$$A^{\mu} \rightarrow A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\upsilon}} A^{\mu}(x) \quad (1.3.a)$$

Sedangkan *vektor kovarian*

$$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\mu}} A_{\upsilon}(x) \quad (1.3.b)$$

Tensor rank dua kontravarian $A^{\mu\upsilon}$, kovarian $A_{\mu\upsilon}$, dan campuran A^{μ}_{υ} didefinisikan oleh sifat transformasi kompenennya seperti berikut

$$A^{\mu\upsilon} \rightarrow A'^{\mu\upsilon} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\upsilon}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha\beta}$$

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\upsilon}} A_{\alpha\beta} \quad (1.4)$$

$$A^{\mu}{}_{\nu} \rightarrow A'^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\upsilon}} A^{\alpha}_{\beta}$$

Tampak bahwa rank menujukan pada jumlah turunan parsial dalam definisi, nol untuk skalar, satu untuk vektor dan dua untuk tensor rank kedua.

Tensor stress-energi. Untuk mendapatkan gambaran arti fisis suatu tensor rank kedua kita tinjau tensor stress-energi bagi materi dan radiasi. Tensor stress-energi adalah tensor simetrik, $T^{\mu\upsilon} = T^{\upsilon\mu}$, dan di dalam relativitas khusus memenuhi hukum kekekalan

$$T^{\mu\upsilon}{}_{,\upsilon} = \partial_{\upsilon} T^{\mu\upsilon} = 0 \qquad (1.5)$$

Ini serupa dengan hukum kekekalan muatan

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad (1.6)$$

Dengan interpretasi yang sama. Jika kita integralkan persamaan (1.5) terhadap suatu daerah di dalam ruang dengan syarat batas yang tetap dan waktu tetap $t = x^{o}$, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int d^{3}xT^{oo} &= -\int da_{\beta}T^{o\beta} \\ \frac{\partial}{\partial t}\int d^{3}xT^{\alpha o} &= -\int da_{\beta}T^{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Teorema Gauss telah menggantikan integral volume dari divergensi dengan integral permukaan dengan elemen permukaan da_{β}. Komponen T^{oo} adalah rapat massa (energi) dan massa di daerah integral adalah $M = \int d^{3}xT^{oo}$. Laju perubahan massa adalah integral dari kerapatan fluks massa $T^{o\beta}$ melalui permukaan yang membatasi volume. $T^{o\beta}$ adalah jumlah massa yang mengalir melalui luas satuan yang tegak lurus terhadap arah β dalam satuan waktu. Kerapatan fluks massa adalah momentum per satuan volume, $T^{\alpha o}$ dan laju perubahan momentum adalah kerapatan fluks momentum dalam arah β. Karena gaya adalah laju perubahan momentum, dan tekanan adalah gaya persatuan luas, tekanan dalam arah *z* adalah T^{33}, dan stress geser dalam arah *y* pada permukaan dengan luas da dan arah normal searah sumbu *z* positip adalah $T^{23}da$.

Tensor metrik. Di dalam ruangwaktu empat dimensi tensor metrikdiberikan oleh

$$g_{\mu\upsilon} = e_{\mu} \cdot e_{\upsilon} \qquad (1.8)$$

Jelas bahwa di dalam koordinat Cartesian

$$g_{\mu\upsilon} = g_{\mu\upsilon} \tag{1.9}$$

Perkalian skalar dua vektor

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= g^{\mu\upsilon}A_{\mu}B_{\upsilon}\\ &= g_{\mu\upsilon}A^{\mu}B^{\upsilon}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Dengan demikian

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^{\mu}B_{\mu} = A_{\mu}B^{\mu} \tag{1.11}$$

Sedangkan dari persamaan (1.8) didapatkan

$$A^{\mu} = g_{\mu\upsilon}A^{\upsilon} \tag{1.12}$$

Invers dari tensor metrik $g_{\mu\upsilon}$ ditulis $g^{\mu\upsilon}$

$$g_{\mu\alpha}g^{\upsilon\alpha} = \delta_{\mu}^{\upsilon} \tag{1.13}$$

Tensor metrik bertransformasi menurut

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\upsilon}}g_{\alpha\beta} \tag{1.14}$$

Indentitas $\dfrac{\partial x^{i}}{\partial q^{j}}\dfrac{\partial q^{j}}{\partial x^{k}} = \delta_{k}^{i}$ dapat diperluas menjadi

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\upsilon}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} = \delta_{\upsilon}^{\mu} \tag{1.15}$$

Selanjutannya, perkalian antara dua vektor kovarian dan kontravarian

$$A'^{\mu}B'_{\mu} = A^{\upsilon}B_{\upsilon} \tag{1.16}$$

Bertransformasi sebagai scalar.

Kerapatan tensor. Determinan tensor metrik g

$$g = \det g_{\mu\upsilon} \tag{1.17}$$

Kaidah transformasi dapat dipandang sebagai persamaan matriks dan pengambilan determinannya memberikan

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|g \tag{1.18}$$

yang mana $|\partial x/\partial x'|$ adalah Jacobian dari transformasi $x \to x'$, yakni determinan dari matriks $\partial x^{\alpha}/\partial x'^{\mu}$. Kuantitas seperti g yang bertransformasi sebagai skalar kecuali terdapat faktor ekstra Jacobian disebut kerapatan skalar. Bilangan dari faktor $|\partial x/\partial x'|$ disebut bobot dari kerapatan. Dari persamaan (1.18) g adalah kerapatan dengan bobot -2 karena

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-1} \tag{1.19}$$

$$g' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-2} g \tag{1.20}$$

Masih tentang determinan tensor metrik g, yakni

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = g\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\varepsilon\beta}}{\partial x^{\mu}} \tag{1.21}$$

atau

$$\partial_{\mu} \ln g = g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \partial_{\mu} g^{\alpha\beta} \tag{1.22}$$

1.2 *Turunan Kovarian*

Ditinjau transformasi koordinat kecil

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

$$\delta x^{\mu} \equiv x'^{\mu} - x^{\mu} = \xi^{\mu}, |\xi^{\mu}| << 1 \tag{1.23}$$

Jika φ merupakan medan skalar, maka setelah transformasi kecil dari x^{μ} ke $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ kuantitas skalar $\varphi'(x') = \varphi(x)$. Artinya,

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi(x) = \phi(x' - \xi) \\ &\cong \phi(x') - \xi^{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} \end{aligned} \tag{1.24}$$

suku (ξ^{μ}) diabaikan dan yang lebih tinggi. Karena itu, untuk skalar didapatkan

$$\delta\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x) = -\xi^{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\left(x'^{\upsilon} - \xi^{\upsilon}\right) \\ &= \delta_{\mu}^{\upsilon} - \frac{\partial \xi^{\upsilon}}{\partial x'^{\mu}} \\ &= \delta_{\mu}^{\upsilon} - \partial_{\mu}\xi^{\upsilon}\end{aligned} \tag{1.26}$$

Karena itu, perubahan kecil vektor kovarian A_{μ}, sampai orde pertama

$$\begin{aligned}A'_{\mu}\left(x^{i}\right) &= \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\mu}} A_{\upsilon}(x) \\ &= \left(\delta_{\mu}^{\upsilon} - \partial_{\mu}\xi^{\upsilon}\right) A_{\upsilon}\left(x' - \xi\right) \\ &\cong \left(\delta_{\mu}^{\upsilon} - \partial_{\mu}\xi^{\upsilon}\right)\left(A_{\upsilon} - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\upsilon}\right) \\ &= A_{\mu}\left(x'\right) - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\mu} - \partial_{\mu}\xi^{\upsilon}A_{\upsilon}\end{aligned} \tag{1.27}$$

dan

$$\delta A_{\mu} = A'_{\mu}(x') - A_{\mu}(x') = -\xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A_{\mu} - A_{\alpha}\partial_{\mu}\xi^{\alpha}$$

Tampak bahwa δA_{μ} bergantung pada A_{α} dan ξ_{α}

Sedangkan untuk perubahan kecil vektor kontravarian dilihat hubungan

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\upsilon}} = \delta_{\upsilon}^{\mu} + \partial_{\upsilon}\xi^{\mu} \tag{1.28}$$

Karena itu,

$$\begin{aligned}A'^{\mu}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\upsilon}} A^{\upsilon}(x) \\ &= \left(\delta_{\upsilon}^{\mu} + \partial_{\upsilon}\xi_{\upsilon}\right)\left(A^{\upsilon}(x') - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{\upsilon}\right) \\ &\cong A^{\mu}(x') + A^{\mu}(x')\partial_{\upsilon}\xi^{\mu} - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{\mu}\end{aligned} \tag{1.29}$$

sehingga

$$\delta A^{\mu} = A^{\alpha}\partial_{\alpha}\xi^{\mu} - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}A^{\mu} \tag{1.30}$$

Menggunakan prosedur yang sama, variasi tensor rank kedua kovarian dan antikovarian juga dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}A'_{\mu\upsilon}(x') &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\upsilon}} A_{\alpha\beta}(x) \\ &= \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\xi^{\alpha}\right)\left(\delta_{\upsilon}^{\beta} - \partial_{\upsilon}\xi^{\beta}\right) A_{\alpha\beta}\left(x' - \xi\right) \\ &\cong \left(\delta_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\xi^{\alpha}\right)\left(\delta_{\upsilon}^{\beta} - \partial_{\upsilon}\xi^{\beta}\right)\left(A_{\alpha\beta} - \xi^{\rho}\partial_{\rho}A_{\alpha\beta}\right) \\ &= A_{\mu\upsilon}(x') - \xi^{\rho}\partial_{\rho}A_{\mu\upsilon} - \partial_{\upsilon}\xi^{\beta}A_{\mu\beta} - \partial_{\mu}\xi^{\alpha}A_{\alpha\upsilon}\end{aligned} \tag{1.31}$$

maka

$$\begin{aligned}\delta A_{\mu\upsilon}(x) &= A'_{\mu\upsilon}(x) - A_{\mu\upsilon}(x)\\ &= -\xi^{\rho}\partial_{\rho}A_{\mu\upsilon} - A_{\mu\beta}\partial_{\upsilon}\xi^{\beta} - A_{\alpha\upsilon}\partial_{\mu}\xi^{\alpha}\end{aligned} \tag{1.32}$$

serupa

$$\begin{aligned}A'^{\mu\upsilon}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\beta}} A^{\alpha\beta}(x)\\ &\cong \left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \partial_{\alpha}\xi^{\mu}\right)\left(\delta^{\upsilon}_{\beta} + \partial_{\beta}\xi^{\upsilon}\right)\left(A^{\alpha\beta} - \xi^{\rho}\partial_{\rho}A^{\alpha\beta}\right)\\ &= A^{\mu\upsilon}(x') - \xi^{\rho}\partial_{\rho}A^{\mu\upsilon} + \partial_{\beta}\xi^{\upsilon}A^{\mu\beta} - \partial_{\alpha}\xi^{\mu}A^{\alpha\upsilon}\end{aligned} \tag{1.33}$$

maka

$$\begin{aligned}\delta A^{\mu\upsilon}(x) &= A'^{\mu\upsilon}(x) - A^{\mu\upsilon}(x)\\ &= -\xi^{\rho}\partial_{\rho}A^{\mu\upsilon} - A^{\mu\beta}\partial_{\beta}\xi^{\upsilon} - A^{\beta\upsilon}\partial_{\beta}\xi^{\mu}\end{aligned} \tag{1.34}$$

Di dalam sistem koordinat kurva linear dA^{μ} tidak bertransformasi sebagai vektor sedangkan $\partial_{\mu}A^{\upsilon}$ tidak bertransformasi sebagai tensor . Dari persamaan (1.3.a) menunjukan

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} A'^{\upsilon} \tag{1.35}$$

maka

$$\begin{aligned}dA^{\mu} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} dA'^{\mu}(x) + A'^{\mu}(x) d\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}}\right)\\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} dA'^{\mu}(x) + A'^{\mu}(x)\left(\frac{\partial^{2} x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\upsilon}}\right) dx'^{\alpha}\end{aligned} \tag{1.36}$$

Jelas, dA^{μ} akan bertransformasi sebagai vektor jika suku kedua ruas kanan persamaan (1.36) sama dengan nol

$$\frac{\partial^{2} x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\upsilon}} = 0 \tag{1.37}$$

artinya $x^{\mu} = f^{\mu}(x')$ fungsi linear dari x'^{μ}.

untuk mendapatkan elemen vektor yang bertransformasi seperti vektor, didefinisika suatu generalisasi

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - \delta A^{\mu} \tag{1.38}$$

Secara umum δA^{μ} bergantung pada elemen perpindahan dx^{μ} dan vektor A^{β}, karena itu, didefinisika kuantitas penghubung Γ

$$\begin{aligned}\delta A^{\mu} &= \delta A^{\mu}\left(dx^{\alpha}, A^{\beta}\right) \\ &= -\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} A^{\alpha} dx^{\beta}\end{aligned} \tag{1.39}$$

$\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ disebut *simbol christoffel* . δA^{μ} bukan vektor, tetapin DA^{μ} didefinisikan sebagai vektor dan dipenuhi jika symbol christoffel dapat diuraikan sebagai berikut

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \rightarrow \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma^{\lambda}_{\rho\upsilon} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^{2} x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'_{\beta}} \tag{1.40}$$

atau

$$\Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \left\{ \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma^{\lambda}_{\rho\upsilon} + \frac{\partial^{2} x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'_{\beta}} \right\} \tag{1.41}$$

dan

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{\partial^{2} x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'_{\beta}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma^{\lambda}_{\rho\upsilon} \tag{1.42}$$

Dari sifat dA^{μ} dan dx^{μ} didapatkan

$$\begin{aligned}DA^{\mu} &= dA^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} A^{\beta} dx^{\alpha} \\ &= \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} dA'^{\upsilon} + \frac{\partial^{2} x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} A'^{\alpha} dx'^{\beta} \right) \\ &\quad + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\upsilon}} dA'^{\upsilon} \right) \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} dx'^{\lambda} \right)\end{aligned} \tag{1.43}$$

Menggunakan persamaan , persamaan menjadi

$$
\begin{aligned}
DA^{\mu} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} dA'^{\upsilon} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} A'^{\alpha} dx'^{\beta} \\
&\quad + dA'^{\upsilon} dx'^{\lambda} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma_{\lambda\upsilon}{}^{\rho} - \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\upsilon}} \right) \\
&= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} dA'^{\upsilon} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma_{\lambda\upsilon}{}^{\rho} dA'^{\upsilon} dx'^{\lambda} \qquad (1.44) \\
&= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} \left\{ dA'^{\upsilon} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho} A'^{\beta} dx'^{\beta} \right\} \\
&= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\upsilon}} \left(DA^{\upsilon} \right)'
\end{aligned}
$$

yakni bertransformasi sebagai vektor.

Dari persamaan (1.38), (1.39) dan (1.42), dapat dituiskan

$$
\begin{aligned}
DA^{\mu} &= dA^{\mu} - \delta A^{\mu} \\
&= dA^{\mu} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} A^{\beta} dx^{\alpha} \qquad (1.45) \\
&= \left\{ \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\beta} \right\} dx^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya didefenisikan turunan kovarian sebagai

$$\frac{DA^{\mu}}{Dx^{\alpha}} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\beta} \qquad (1.46)$$

Yang dapat ditulis dalam notasi

$$D_{\alpha} A^{\mu} = \partial_{\alpha} A^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\beta} \qquad (1.47)$$

atau

$$A^{\mu}{}_{;\alpha} = A^{\mu}{}_{,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\beta} \qquad (1.48)$$

Catatan: tanda titik koma menunjukan turunan kovarian dan tanda koma untuk turunan biasa.

Untuk menurunkan turunan kovarian bagi vektor kovarian ditinjau terlebih dahulu invariansi skalar selama perpindahan, dimisalkan

$$A^2 = g_{\mu\upsilon} A^{\mu} A^{\upsilon} = A^{\mu} A_{\mu} \qquad (1.49)$$

maka

$$\delta\left(A^{\mu} A_{\mu}\right) = A^{\mu} \delta A_{\mu} + A^{\mu} \delta A_{\mu} = 0 \qquad (1.50)$$

atau

$$\begin{aligned} A^{\mu}\delta A_{\mu} &= -A_{\mu}\delta A^{\mu} \\ &= A_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}A^{\alpha}dx^{\beta} \\ &= A_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A^{\mu}dx^{\beta} \end{aligned} \quad (1.51)$$

sehingga

$$\delta A_{\mu} = A_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A_{\alpha}dx^{\beta} \quad (1.52)$$

Untuk vektor kovarian, DA_{μ}

$$\begin{aligned} DA_{\mu} &= dA_{\mu} - \delta A_{\mu} \\ &= dA_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A_{\alpha}dx^{\beta} \end{aligned} \quad (1.53)$$

sehingga

$$\frac{DA_{\mu}}{Dx^{\beta}} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A_{\alpha} \quad (1.54)$$

atau

$$D_{\beta}A_{\mu} = \partial_{\beta}A_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A_{\alpha} \quad (1.55)$$

dan

$$A_{\mu;\beta} = A_{\mu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}A_{\alpha} \quad (1.56)$$

1.3 Geodesik

Metrik suatu ruang diberikan oleh

$$ds^2 = g_{\mu\upsilon}dx^{\mu}dx^{\upsilon} \quad (1.57)$$

Dengan $g_{\mu\upsilon}$ fungsi dari x^{μ}. kurva Γ di dalam ruang waktu yang dipresentasikan oleh

$$\Gamma : x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda)\ \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2 \quad (1.58)$$

sehingga

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\upsilon}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}d\lambda\frac{dx^{\upsilon}}{d\lambda}d\lambda \\ &= g_{\mu\upsilon}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\upsilon}d\lambda^2 \end{aligned} \quad (1.59)$$

Dengan demikian, panjang kurva diberikan oleh

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{g_{\mu\upsilon}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\upsilon}}\,d\lambda \quad (1.60)$$

Misalkan $F=\sqrt{g_{\mu\upsilon}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\upsilon}}$ maka

$$s=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F d\lambda \tag{1.61}$$

Prinsip variasi memberikan

$$
\begin{aligned}
\delta s = 0 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta F d\lambda \\
&= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}^{\mu} + \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} \right\} d\lambda \\
&= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \left(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \right) + \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} \right\} d\lambda \\
&= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{d\lambda} \left(\delta x^{\mu} \right) + \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} \right\} d\lambda \\
&= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x^{\mu} \right) - \delta x^{\mu} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) + \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} \right\} d\lambda \\
&= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x^{\mu} \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \right\} \delta x^{\mu} d\lambda \\
&= 0 + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \right\} \delta x^{\mu} d\lambda
\end{aligned}
\tag{1.62}
$$

Dan dipenuhi oleh

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} = 0 \tag{1.63}$$

Yang tidak lain adalah persamaan Euler-Lagrange.

Uraian lebih lanjut memberikan

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} = \frac{\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}}{2\sqrt{g_{\sigma\rho} \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\rho}}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \tag{1.64}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} &= \frac{g_{\alpha\beta}}{2\sqrt{g_{\sigma\rho} \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\rho}}} \left(\frac{\partial \dot{x}^{\alpha}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \dot{x}^{\beta} + \dot{x}^{\alpha} \frac{\partial \dot{x}^{\beta}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \\
&= \frac{g_{\mu\beta} \dot{x}^{\beta}}{\sqrt{g_{\sigma\rho} \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\rho}}}
\end{aligned}
\tag{1.65}
$$

Subtitusi kembali ke persamaan (1.63) didapatkan

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\mu\beta}\dot{x}^{\beta}}{ds/d\lambda}\right)-\frac{\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}{2\,ds/d\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}=0 \tag{1.66}$$

Uraian suku pertama persamaan (1.66) memberikan

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\mu\beta}\dot{x}^{\beta}}{ds/d\lambda}\right)=\frac{\dot{x}^{\beta}}{ds/d\lambda}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\lambda}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\mu\beta}\ddot{x}^{\beta}}{ds/d\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\beta}\dot{x}^{\beta}}{(ds/d\lambda)^{2}}\frac{d^{2}s}{d\lambda^{2}} \tag{1.67}$$

$$\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}+g_{\mu\beta}\ddot{x}^{\beta}-\frac{\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial g_{\mu\beta}\dot{x}^{\beta}}{ds/d\lambda}\frac{d^{2}s}{d\lambda^{2}} \tag{1.68}$$

Tetapi suku pertama masih dapat dijabarkan lebih lanjut sebagai

$$\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha}\frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x^{\beta}}\right) \tag{1.69}$$

sehingga persamaan (1.69)

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\alpha}+\partial g_{\mu\beta}\ddot{x}^{\beta}=\frac{\partial g_{\mu\beta}\dot{x}^{\beta}}{ds/d\lambda}\frac{d^{2}s}{d\lambda^{2}} \tag{1.70}$$

Persamaan (1.70) dikalikan dengan dangan $g^{\upsilon\mu}$ dan gunakan simbol Christoffel, diperoleh

$$\Gamma^{\upsilon}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}+\ddot{x}^{\upsilon}=\dot{x}^{\upsilon}\frac{d^{2}s/d\lambda^{2}}{ds/d\lambda} \tag{1.71}$$

Jika parameter λ adalah panjang busur s dari kurva, yaitu

$$\frac{ds}{d\lambda}=\sqrt{g_{\mu\upsilon}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\upsilon}}=1 \tag{1.72}$$

Sehingga $d^{2}s/d\lambda^{2}=0,$ maka diperoleh bentuk akhir persamaan Euler-Langrange

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}+\ddot{x}^{\mu}=0 \tag{1.73}$$

2. Persamaan medan

2.1 Kurvatur

Ruang dua dimensi yang paling sederhana adalah bidang datar atau bidang saja, yang mana geometri Euclidean berlaku. Pada bidang datar, geodesik adalah garis lurus.

2.2 Tensor kurvatur

Pepindahan parallel dari vektor di dalam ruang non-Euchlidian secara umum bergantung lintasan. Bila suatu vektor digeser sepanjang lintasan tertutup, vektor akhir secara umum tidak berimpit dengan vektor awal. Dengan kata lain perubahan vektor setelaj melintas ruang-waktu dan kembali kettempat semula secara umum tidak nol.

Tensor Riemann menentukan variasi dari vektor A_μ selam perpindahan parallel sepanjang kontur γ tertutup kecil.

Dari ungkapan dari variasi vektor koarian, diperoleh

$$\Delta A_\mu = \oint_\gamma \delta A_\mu = \oint_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \delta A_\alpha \, dx^\beta \tag{2.1}$$

Menggunakan teorema Stokes 4-dimensional

$$\begin{aligned} \oint_\gamma V_\mu dx^\mu &= \oint_\gamma df^{\mu\upsilon} \partial_\mu V_\upsilon \\ &= \frac{1}{2} \int_F df^{\mu\upsilon} \left(\partial_\mu V_\upsilon - \partial_\upsilon V_\mu \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dengan permukaan-hiper antisimetri

$$df^{\mu\upsilon} = -df^{\upsilon\mu} \tag{2.3}$$

maka

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \int_F df^{\alpha\beta} \left\{ \partial_\alpha \left(\Gamma^\upsilon_{\beta\mu} A_\upsilon \right) - \partial_\beta \left(\Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} A_\upsilon \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_F df^{\alpha\beta} \left\{ \partial_\alpha \Gamma^\upsilon_{\beta\mu} A_\upsilon + \Gamma^\upsilon_{\beta\mu} \partial_\alpha A_\upsilon - \partial_\beta \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} A_\upsilon - \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} \partial_\beta A_\upsilon \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Kemudian menggunakan persamaan (1.53) dan (1.54)

$$DA_\mu = \left\{ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} A_\beta \right\} dx^\alpha \tag{2.5}$$

terkait dengan perpindahan parallel sepanjang geodesik, yakni $DA_\mu = 0$, maka

$$\partial_\alpha A_\mu = \Gamma^\beta_{\alpha\mu} A_\beta \tag{2.6}$$

Dengan demikian persamaan (2.4) menjadi

$$\begin{aligned}\Delta A &= \int_F df^{\alpha\beta}\left\{\partial_\alpha \Gamma^\upsilon_{\beta\mu} A_\upsilon + \Gamma^\upsilon_{\beta\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\upsilon} A_\rho - \partial_\beta \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} A_\upsilon - \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu}\Gamma^\rho_{\beta\upsilon} A_\rho\right\} \\ &= \int_F df^{\alpha\beta}\left\{\partial_\alpha \Gamma^\upsilon_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} + \Gamma^\upsilon_{\beta\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\rho} - \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu}\Gamma^\rho_{\beta\rho}\right\} A_\upsilon\end{aligned} \qquad (2.7)$$

Untuk daerah kecil (infinitesimal) $\int df^{\alpha\beta} \to \Delta f^{\alpha\beta}$, maka

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{1}{2}\left\{\partial_\alpha \Gamma^\upsilon_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} + \Gamma^\upsilon_{\beta\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\rho} - \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu}\Gamma^\rho_{\beta\rho}\right\} A_\upsilon \Delta f^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} R^\upsilon_{\alpha\beta\mu} A_\upsilon \Delta f^{\alpha\beta}\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Dengan

$$R^\upsilon_{\alpha\beta\mu} = \partial_\alpha \Gamma^\upsilon_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu} + \Gamma^\upsilon_{\beta\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\rho} - \Gamma^\upsilon_{\alpha\mu}\Gamma^\rho_{\beta\rho} \qquad (2.9)$$

Yang disebut *tensor kurvatur Riemann.* Dengan cara serupa, untuk vektor kontravarian

$$\Delta A = -\frac{1}{2} R^\upsilon_{\alpha\beta\mu} A^\upsilon \Delta f^{\alpha\beta} \qquad (2.10)$$

Metode alternatif untuk mendapatkan tensor kurvatur Riemann adalah sebagai berikut. Misalkan A_μ adalah vektor, maka turunan kovariannya $A_{\mu;\upsilon}$ adalah tensor. Permainannya adalah menuliskan turunan kovarian dari medan $A_{\mu;\upsilon}$ ini, $A_{\mu;\upsilon;\alpha}$ dan kemudian melakukan turunan dalam urutan terbalik $A_{\mu;\alpha;\upsilon}$. Di dalam menyelisihkan kedua turunan kovarian dari tensor ini turunan parsial dari A_μ lenyap, dan menyisakan suku yang sebanding dengan A_μ. Bagian yang mengalikan dengan A_μ yang merupakan fungsi dari tensor metrik dan turunan pertama serta keduanya adalah tensor kurvatur yang dicari.

Ditinjau kembali turunan kovarian bagi vektor kontravarian dan tensor campuran

$$A^\mu{}_{;\alpha} = \partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta \qquad (2.11)$$

$$A^\mu{}_{\upsilon;\beta} = \partial_\alpha A_\upsilon{}^\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\upsilon} A^\mu{}_\alpha + \Gamma^\mu_{\beta\alpha} A^\alpha{}_\upsilon$$

Kedua bentuk tersebut memberikan turunan kovarian lebih lanjut sebagai berikut

$$\begin{aligned}\left(A^{\mu}_{;\alpha}\right)_{;\beta} &= \partial_{\beta}\left(A^{\mu}_{;\alpha}\right) - \Gamma^{\upsilon}_{\alpha\beta}\left(A^{\mu}_{;\nu}\right) + \Gamma^{\upsilon}_{\beta\upsilon}\left(A^{\mu}_{;\alpha}\right) \\ &= \partial_{\beta}\left(\partial_{\alpha}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}A^{\upsilon}\right) - \Gamma^{\upsilon}_{\beta\alpha}\left(\partial_{\upsilon}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\upsilon\rho}A^{\rho}\right) \\ &\quad + \Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}\left(\partial_{\alpha}A^{\upsilon} + \Gamma^{\upsilon}_{\alpha\rho}A^{\rho}\right)\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dan

$$\begin{aligned}\left(A^{\mu}_{;\beta}\right)_{;\alpha} &= \partial_{\alpha}\left(\partial_{\beta}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}A^{\upsilon}\right) - \Gamma^{\upsilon}_{\alpha\beta}\left(\partial_{\upsilon}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\upsilon\rho}A^{\rho}\right) \\ &\quad + \Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}\left(\partial_{\beta}A^{\upsilon} + \Gamma^{\upsilon}_{\beta\rho}A^{\rho}\right)\end{aligned} \tag{2.13}$$

Selisih keduanya diberikan oleh

$$\begin{aligned}A^{\mu}_{;\alpha;\beta} - A^{\mu}_{;\beta;\alpha} &\equiv -R^{\mu}_{\alpha\beta\upsilon}A^{\upsilon} \\ &= \left(\partial_{\beta}\partial_{\alpha} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\right)A^{\mu} + \partial_{\beta}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}A^{\upsilon}\right) - \partial_{\alpha}\left(\Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}A^{\upsilon}\right) \\ &\quad - \left(\Gamma^{\upsilon}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\upsilon}_{\alpha\beta}\right)\left(\partial_{\upsilon}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\upsilon\rho}A^{\rho}\right) + \left(\Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}\partial_{\alpha}A^{\upsilon} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}\partial_{\beta}A^{\upsilon}\right) \\ &\quad + \left(\Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}\Gamma^{\upsilon}_{\alpha\rho}A^{\rho} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}\Gamma^{\upsilon}_{\beta\rho}A^{\rho}\right) \\ &= \left(\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}\right)A^{\upsilon} - \left(\partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}\right)A^{\upsilon} + \Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon}\Gamma^{\upsilon}_{\alpha\rho}A^{\rho} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon}\Gamma^{\upsilon}_{\beta\rho}A^{\rho} \\ &= -\left(\partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\upsilon} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\upsilon} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\upsilon} - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\upsilon}\right)A^{\upsilon}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dengan cara serupa, didapatkan

$$A_{\mu;\alpha;\beta} - A_{\mu;\beta;\alpha} = R^{\upsilon}_{\alpha\beta\mu}A_{\upsilon} \tag{2.15}$$

Dari tensor kurvatur tersebut dapat diperoleh tensor kovarian rank keempat

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\beta\rho}R^{\rho}_{\mu\nu\alpha} \tag{2.16}$$

Tensor kurvatur ini mempunyai sifat antisimetri

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\alpha\beta} &= R_{\mu\upsilon[\alpha\beta]} \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} &= R_{[\alpha\beta]\mu\upsilon}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dari sifat simetri

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2.18}$$

Serta siklik

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\upsilon} + R^{\mu}_{\beta\upsilon\alpha} + R^{\mu}_{\upsilon\alpha\beta} = 0 \tag{2.19}$$

Selain itu, tensor kurvatur juga memenuhi identitas Bianchi

$$R^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon};_{\rho} + R^{\alpha\beta}_{\upsilon\rho};_{\mu} + R^{\alpha\beta}_{\rho\mu};_{\upsilon} = 0 \tag{2.20}$$

Selanjutnya, dari tensor Riemann didefenisikan tensor rank-dua ricci, $R_{\mu\upsilon}$

$$\begin{aligned} R_{\mu\upsilon} &= R^{\alpha}_{\alpha\mu\upsilon} \\ &= \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\upsilon} - \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\upsilon} + \Gamma^{\beta}_{\mu\upsilon}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\upsilon}\gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dan skalar kurvatur

$$R = g^{\mu\upsilon}R_{\mu\upsilon} = R^{\mu}_{\mu} \tag{2.22}$$