

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berikut diberikan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil dan pembahasan yaitu bentuk umum dan trace matriks *Circulant*. Diberikan Matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat yaitu sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } z = a + ib \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ dan } i = \sqrt{-1}.$$

1. Bentuk umum Matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 berpangkat

bilangan bulat, yaitu:

$$A^n = \begin{bmatrix} \left[\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & \left[\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n \\ [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & [(-1)^{n-1} + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}]z^n & \left[\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right]z^n \end{bmatrix}$$

dengan n bilangan bulat.

2. Bentuk umum Trace Matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat, yaitu:

$$\text{tr}(A^n) = (2^n + 2(-1)^n)z^n$$

dengan n bilangan bulat.

5.2 Saran

Penelitian ini mendapatkan bentuk umum matriks *Circulant* Kompleks Bentuk Khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat beserta nilai tracenya. Disarankan pada penelitian selanjutnya agar dapat mencari bentuk matriks 3×3 yang lebih umum

lagi untuk dicari perpangkatan serta nilai trace berpangkatnya. Penelitian selanjutnya juga bisa dilanjutkan untuk mencari perpangkatan matriks dan juga trace matriks berpangkat untuk matriks *Circulant* Kompleks Berukuran 4×4 atau lebih.

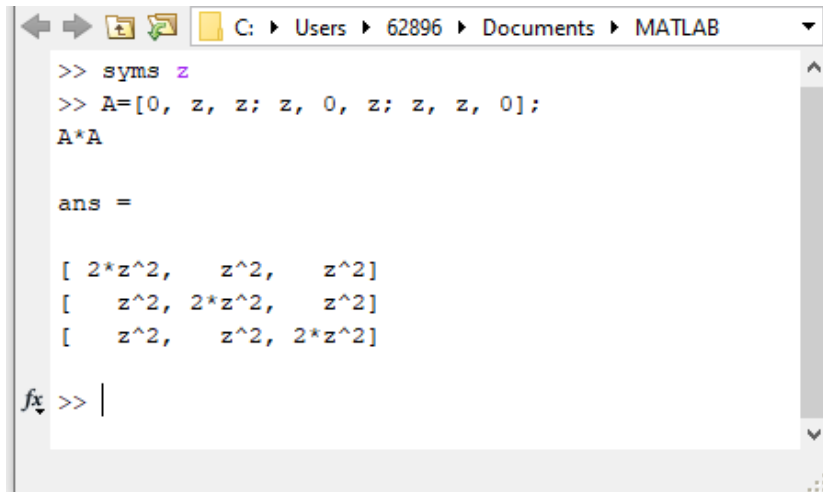
DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. (1987). *Aljabar Linear Elementer (Edisi Kelima)*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H. and Rorres, C. (2006). *Aljabar Linear Elementer (Jilid 2)*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H. and Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer (Jilid 1)*. Jakarta: Erlangga.
- Aryani, F. et al. (2018) 'Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif', *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, pp. 673–681.
- Aryani F., Titik F. (2019). 'Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif', *Talenta Conference Series: Science and Technology (ST)*, 2(2).
- Carmona, A. et al. (2020) 'The group inverse of some circulant matrices', *Linear Algebra and Its Applications*. doi: 10.1016/j.laa.2020.11.002.
- Carrasquinha, E. et al. (2018) 'Image reconstruction based on circulant matrices', *Signal Processing: Image Communication*, 63, pp. 72–80.
- DeVillie, L. and Nijholt, E. (2021) 'Circulant type formulas for the eigenvalues of linear network maps', *Linear Algebra and Its Applications*, 610, pp. 379–439.
- Feng, J. M., Kraemer, F. and Saab, R. (2019) 'Quantized compressed sensing for random circulant matrices', *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 47(3), pp. 1014–1032.
- Gentel, J. E. (2007). *Matrix Algebra*, New York: Springer.
- Retnawati, H., Harnaeti (2008). *Kreatif Menggunakan Matematika Untuk SMK/MAK Kelas XI*, Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional

- Jones A. W. (2008). *Circulants*. Pennsylvania (US): Carlisle
- Kannan, K. R., Elumalai, N. and Kavitha, M. (2018). 'On s-normal Circulant and con-s-normal Circulant Matrices', *International Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences*, 5(5), pp. 173–178.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. New York, NY: John Wiley and Sons.
- Larson, R. (2013). *Elementary Linear Algebra (seventh edition)*, Boston: Brooks/Cole.
- Munir, R. (2005), *Matematika Diskrit*, Bandung : Informatika.
- Pahade, J. and Jha, M. (2015). 'Trace of Positive Integer Power of Real 2 x 2 Matrices', *Advances in Linear Algebra and Matrix Theory*, 05(04), pp. 150–155.
- Rahmawati, Wartono and Jelita, M. (2019) 'Trace of Integer Power of Real 3 X 3 Specific Matrices', *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering*, 5(3), pp. 48–56.
- Rosen, K. H. (2007). *Discrete Mathematics and Its Application (seventh edition)*, Singapore: McGraw-Hill.
- Ruminta (2009). *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Bandung: Rekayasa Sains.
- Silverman, J. H.(2006). *friendly introduction to number theory (3rd ed.)*. Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Spiegel, Murray, R. (1964). *Teori dan Soal-Soal Peubah Kompleks dengan Pengenalan Pemetaan Konvormal dan Penerapannya*. Jakarta: Erlangga.

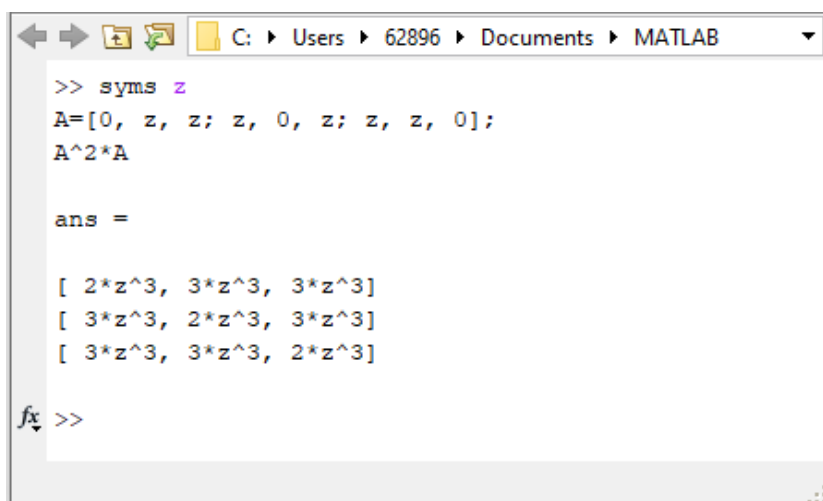
LAMPIRAN

Lampiran 1. Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Menggunakan Matlab



```
C: \ Users \ 62896 \ Documents \ MATLAB  
>> syms z  
>> A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];  
A*A  
  
ans =  
  
[ 2*z^2, z^2, z^2]  
[ z^2, 2*z^2, z^2]  
[ z^2, z^2, 2*z^2]  
fx >> |
```

Gambar 1: Matriks A Berpangkat 2



```
C: \ Users \ 62896 \ Documents \ MATLAB  
>> syms z  
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];  
A^2*A  
  
ans =  
  
[ 2*z^3, 3*z^3, 3*z^3]  
[ 3*z^3, 2*z^3, 3*z^3]  
[ 3*z^3, 3*z^3, 2*z^3]  
fx >>
```

Gambar 2: Matriks A Berpangkat 3

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^3*A

ans =

[ 6*z^4, 5*z^4, 5*z^4]
[ 5*z^4, 6*z^4, 5*z^4]
[ 5*z^4, 5*z^4, 6*z^4]

fx >>
```

Gambar 3: Matriks A Berpangkat 4

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^4*A

ans =

[ 10*z^5, 11*z^5, 11*z^5]
[ 11*z^5, 10*z^5, 11*z^5]
[ 11*z^5, 11*z^5, 10*z^5]

fx >> |
```

Gambar 4: Matriks A Berpangkat 5

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^5*A

ans =

[ 22*z^6, 21*z^6, 21*z^6]
[ 21*z^6, 22*z^6, 21*z^6]
[ 21*z^6, 21*z^6, 22*z^6]

fx >>
```

Gambar 5: Matriks A Berpangkat 6

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^6*A

ans =

[ 42*z^7, 43*z^7, 43*z^7]
[ 43*z^7, 42*z^7, 43*z^7]
[ 43*z^7, 43*z^7, 42*z^7]

fx >>
```

Gambar 6: Matriks A Berpangkat 7


```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^7*A

ans =

[ 86*z^8, 85*z^8, 85*z^8]
[ 85*z^8, 86*z^8, 85*z^8]
[ 85*z^8, 85*z^8, 86*z^8]

fx >> |
```

Gambar 7: Matriks A Berpangkat 8

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^8*A

ans =

[ 170*z^9, 171*z^9, 171*z^9]
[ 171*z^9, 170*z^9, 171*z^9]
[ 171*z^9, 171*z^9, 170*z^9]

fx >> |
```

Gambar 8: Matriks A Berpangkat 9

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^9*A

ans =

[ 342*z^10, 341*z^10, 341*z^10]
[ 341*z^10, 342*z^10, 341*z^10]
[ 341*z^10, 341*z^10, 342*z^10]

fx >>
```

Gambar 9: Matriks A Berpangkat 10

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^10*A

ans =

[ 682*z^11, 683*z^11, 683*z^11]
[ 683*z^11, 682*z^11, 683*z^11]
[ 683*z^11, 683*z^11, 682*z^11]

fx >>
```

Gambar 10: Matriks A Berpangkat 11

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^11*A

ans =

[ 1366*z^12, 1365*z^12, 1365*z^12]
[ 1365*z^12, 1366*z^12, 1365*z^12]
[ 1365*z^12, 1365*z^12, 1366*z^12]

fx >> |
```

Gambar 11: Matriks A Berpangkat 12

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-1}

ans =

[ -1/(2*z), 1/(2*z), 1/(2*z)]
[ 1/(2*z), -1/(2*z), 1/(2*z)]
[ 1/(2*z), 1/(2*z), -1/(2*z)]

fx >>
```

Gambar 12: Matriks A Berpangkat -1

```
C: \> Users \> 62896 \> Documents \> MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-1}*A^{-1}

ans =

[ 3/(4*z^2), -1/(4*z^2), -1/(4*z^2)]
[ -1/(4*z^2), 3/(4*z^2), -1/(4*z^2)]
[ -1/(4*z^2), -1/(4*z^2), 3/(4*z^2)]

fx >>
```

Gambar 13: Matriks A Berpangkat -2

```
C: \> Users \> 62896 \> Documents \> MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-2}*A^{-1}

ans =

[ -5/(8*z^3), 3/(8*z^3), 3/(8*z^3)]
[ 3/(8*z^3), -5/(8*z^3), 3/(8*z^3)]
[ 3/(8*z^3), 3/(8*z^3), -5/(8*z^3)]

fx >>
```

Gambar 14: Matriks A Berpangkat -3

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-3}*A^{-1}

ans =

[ 11/(16*z^4), -5/(16*z^4), -5/(16*z^4)]
[ -5/(16*z^4), 11/(16*z^4), -5/(16*z^4)]
[ -5/(16*z^4), -5/(16*z^4), 11/(16*z^4)]

fx >> |
```

Gambar 15: Matriks A Berpangkat -4

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-4}*A^{-1}

ans =

[ -21/(32*z^5), 11/(32*z^5), 11/(32*z^5)]
[ 11/(32*z^5), -21/(32*z^5), 11/(32*z^5)]
[ 11/(32*z^5), 11/(32*z^5), -21/(32*z^5)]

fx >>
```

Gambar 16: Matriks A Berpangkat -5

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{ -5}*A^{ -1}

ans =

[ 43/(64*z^6), -21/(64*z^6), -21/(64*z^6)]
[ -21/(64*z^6), 43/(64*z^6), -21/(64*z^6)]
[ -21/(64*z^6), -21/(64*z^6), 43/(64*z^6)]

fx >> |
```

Gambar 17: Matriks A Berpangkat -6

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{ -6}*A^{ -1}

ans =

[ -85/(128*z^7), 43/(128*z^7), 43/(128*z^7)]
[ 43/(128*z^7), -85/(128*z^7), 43/(128*z^7)]
[ 43/(128*z^7), 43/(128*z^7), -85/(128*z^7)]

fx >> |
```

Gambar 18: Matriks A Berpangkat -7

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-7}*A^{-1}

ans =

[ 171/(256*z^8), -85/(256*z^8), -85/(256*z^8)]
[ -85/(256*z^8), 171/(256*z^8), -85/(256*z^8)]
[ -85/(256*z^8), -85/(256*z^8), 171/(256*z^8)]

fx >>
```

Gambar 19: Matriks A Berpangkat -8

```
C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-8}*A^{-1}

ans =

[ -341/(512*z^9), 171/(512*z^9), 171/(512*z^9)]
[ 171/(512*z^9), -341/(512*z^9), 171/(512*z^9)]
[ 171/(512*z^9), 171/(512*z^9), -341/(512*z^9)]

fx >> |
```

Gambar 20: Matriks A Berpangkat -9

```

C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-9}*A^{-1}

ans =

[ 683/(1024*z^10), -341/(1024*z^10), -341/(1024*z^10)]
[ -341/(1024*z^10), 683/(1024*z^10), -341/(1024*z^10)]
[ -341/(1024*z^10), -341/(1024*z^10), 683/(1024*z^10)]
fx >> |

```

Gambar 21: Matriks A Berpangkat -10

```

C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-10}*A^{-1}

ans =

[ -1365/(2048*z^11), 683/(2048*z^11), 683/(2048*z^11)]
[ 683/(2048*z^11), -1365/(2048*z^11), 683/(2048*z^11)]
[ 683/(2048*z^11), 683/(2048*z^11), -1365/(2048*z^11)]
fx >> |

```

Gambar 22: Matriks A Berpangkat -11

```

C:\Users\62896\Documents\MATLAB
>> syms z
A=[0, z, z; z, 0, z; z, z, 0];
A^{-11}*A^{-1}

ans =

[ 2731/(4096*z^12), -1365/(4096*z^12), -1365/(4096*z^12)]
[ -1365/(4096*z^12), 2731/(4096*z^12), -1365/(4096*z^12)]
[ -1365/(4096*z^12), -1365/(4096*z^12), 2731/(4096*z^12)]
fx >> |

```

Gambar 23: Matriks A Berpangkat -12

CURRICULUM VITAE



Penulis bernama lengkap Dewinta Mamula, lahir di Kwandang, pada tanggal 08 Agustus 1999. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Alm. Samin O. Mamula dan Ibu Hartati Anwar. Penulis telah menempuh pendidikan di SDN 1 Mootinelo pada tahun 2005-2011, SMPN 2 Kwandang pada tahun 2011-2014, SMAN 5 Gorontalo Utara pada tahun 2014-2017. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi di Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Gorontalo pada tahun 2017.

Kegiatan yang pernah diikuti selama menjadi mahasiswa Prodi S1-Matematika, antara lain:

1. Peserta Masa Orientasi Mahasiswa Baru (MOMB) pada tahun 2017.
2. Peserta Pelatihan Komputer dan Internet pada tahun 2017.
3. Tim Penyusun Soal Lomba Matematika SMP dalam kegiatan Gorontalo Mathematics Competition (GMC) 2017.
4. Peserta Pelatihan Pengolahan Data Penelitian Menggunakan Software Statistika Tahun 2018.
5. Peserta Kegiatan *Diskusi Tantangan Media di Masa Depan* Tahun 2019.
6. Peserta Pemakalah dalam Seminar Nasional Matematika 2020.

Adapun organisasi yang pernah diikuti selama menjadi mahasiswa Prodi S1-Matematika, antara lain:

1. Sekretaris Bidang Kerohanian Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika (HMPS Matematika) Periode 2018.
2. Anggota Divisi Kemuslimahan Lembaga Dakwah Al-Farabi Fakultas MIPA

Periode 2018.

3. Anggota Bidang Kerohanian, Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA)

Periode 2019.

4. Anggota Divisi Divisi Kemuslimahan Lembaga Dakwah Al-Farabi Fakultas MIPA, Periode 2019.